

УДК 517.958

doi: 10.21685/2072-3040-2024-4-2

Теоремы о нулях линейных дифференциальных операторов

А. И. Фомин¹, В. И. Титаренко²

²Государственный университет управления, Москва, Россия

¹fomin45@mail.ru, ²vera_xmel@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Дифференциальные связи между решениями систем дифференциальных уравнений играют существенную роль в математике и в математической физике. Большое значение имеют порожденные такими связями операторы и алгебры дифференциальной симметрии линейных однородных систем дифференциальных уравнений. Условия совпадения внутренних и внешних алгебр дифференциальной симметрии приводят к понятию теоремы о нулях линейных дифференциальных операторов. Цель работы: дать четкое определение понятия теоремы о нулях для семейства возможных, в частности формальных, решений системы уравнений, доказать общую теорему о делении линейных дифференциальных операторов для семейства формальных решений. *Материалы и методы.* Вводятся необходимые обозначения и понятия. Дается определение теоремы о нулях линейных дифференциальных операторов, поясняется аналогия с теоремой Гильберта. Обсуждаются установленные ранее условия, эквивалентные теореме о нулях, связь с условиями совпадения внешних и внутренних алгебр дифференциальной симметрии. При доказательстве формальной теоремы о делении линейных дифференциальных операторов используются элементы теории линейных локально выпуклых пространств. *Результаты.* Понятие теоремы о нулях распространяется на семейство линейных пространств возможных решений системы дифференциальных уравнений, определяются глобальные, локальные и формальные теоремы о нулях. Доказывается теорема об условиях, эквивалентных теореме о нулях. Вводится общее понятие деления линейных дифференциальных операторов, формулируется и доказывается формальная теорема о делении, в которой коэффициенты возникающего в результате линейного дифференциального оператора могут быть произвольными функциями. *Выводы.* Результаты, полученные в работе, могут служить основой для доказательства ряда теорем о нулях линейных дифференциальных операторов, в частности, формальных теорем над кольцом бесконечно дифференцируемых функций.

Ключевые слова: линейный дифференциальный оператор, кольцо коэффициентов, однородное уравнение, алгебра дифференциальной симметрии, теорема о нулях, локально выпуклое пространство

Для цитирования: Фомин А. И., Титаренко В. И. Теоремы о нулях линейных дифференциальных операторов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 4. С. 18–34. doi: 10.21685/2072-3040-2024-4-2

Theorems on the zeros of linear differential operators

A.I. Fomin¹, V.I. Titarenko²

²State University of Management, Moscow, Russia

¹fomin45@mail.ru, ²vera_xmel@mail.ru

Abstract. *Background.* Differential connections between solutions of systems of differential equations play a significant role in mathematics and mathematical physics. The operators and algebras of differential symmetry of linear homogeneous systems of differential equations generated by such connections are of great importance. The conditions for the coincidence of internal and external algebras of differential symmetry lead to the concept of a theorem on the zeros of linear differential operators. The purpose of the work is to give a clear definition of the concept of a theorem on zeros for a family of possible, in particular, formal, solutions to a system of equations, to prove a general theorem on the division of linear differential operators for a family of formal solutions. *Materials and methods.* The necessary notations and concepts are introduced. A definition of the theorem on zeros of linear differential operators is given, and the analogy with Hilbert's theorem is explained. The previously established conditions equivalent to the zero theorem and the connection with the conditions for the coincidence of external and internal differential symmetry algebras are discussed. When proving the formal theorem on the division of linear differential operators, elements of the theory of linear locally convex spaces are used. *Results.* The concept of a zero theorem is extended to the family of linear spaces of possible solutions to a system of differential equations, and global, local and formal zero theorems are defined. A theorem on conditions equivalent to the zero theorem is proved. The general concept of division of linear differential operators is introduced, a formal division theorem is formulated and proved, in which the coefficients of the resulting linear differential operator can be arbitrary functions. *Conclusions.* The results obtained in this work can serve as the basis for proving a number of theorems on the zeros of linear differential operators, in particular, formal theorems over the ring of infinitely differentiable functions.

Keywords: linear differential operator, coefficient ring, homogeneous equation, differential symmetry algebras, zero theorems, locally convex space

For citation: Fomin A.I., Titarenko V.I. Theorems on the zeros of linear differential operators. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(4):18–34. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-4-2

Введение

Преобразования, которые сохраняют некоторый объект или важные характеристики этого объекта, называют преобразованиями симметрии. В механике и в математической физике основные объекты исследования описываются дифференциальными уравнениями. В таком случае преобразования симметрии должны сохранять множество решений дифференциального уравнения. Существует немало публикаций и трудов, посвященных разным аспектам теории преобразований симметрии и преобразований более общего типа линейных и нелинейных дифференциальных уравнений. Среди таких трудов можно указать книги [1–5].

В частном случае преобразования дифференциальных уравнений порождаются дифференциальными заменами зависимых переменных. В статье [6] был предложен вариант общей теории дифференциальных преобразований симметрии однородных линейных систем дифференциальных уравнений. Естественным продолжением этой статьи стала теория дифференциальных гомоморфизмов однородных линейных систем дифференциальных уравнений, построенная в [7]. Отметим, что на появление статей [6, 7] и принятую в этих статьях терминологию существенное влияние оказали работы Д. П. Желобенко [8, 9].

В статье [6] были определены внутренние и внешние алгебры дифференциальной симметрии однородных линейных систем дифференциальных

уравнений и трансекторные алгебры симметрии. Возник вопрос об условиях совпадения внешних и внутренних алгебр. Общий ответ на этот вопрос привёл к понятию теоремы о нулях линейных дифференциальных операторов (ЛДО). В статье [6] понятие теоремы о нулях ЛДО было заменено более практичным эквивалентным понятием делимости ЛДО, однако название теорема о нулях ЛДО упоминалось в статьях [7, 10]. Это название возникло под впечатлением аналогии с теоремой Гильберта о нулях многочленов Nullstellensatz. В разделе «Материалы и методы» будут введены обозначения и дано определение, которые позволят убедительно прояснить смысл этой аналогии.

Однако содержание статьи не ограничивается этой гуманитарной целью. В теореме 4.1 статьи [6] доказан вариант теоремы о нулях (под названием теоремы о делимости) для специального класса ЛДО с вещественно аналитическими коэффициентами. В качестве решений соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений в этой теореме рассматривалось семейство локальных вещественно аналитических решений. Но понятие теоремы о нулях ЛДО было предложено и развито в [6] только для одного линейного пространства возможных решений (для одного модуля над кольцом скалярных ЛДО). Исправление этого существенного недостатка является одной из главных целей настоящей работы. Предварительно необходимо представить в обновленной форме некоторые результаты статьи [6]. Это делается в разделе «Материалы и методы».

Кроме локальной теоремы 4.1, в [6] доказаны варианты глобальной теоремы о нулях эллиптических ЛДО с вещественно аналитическими коэффициентами, невырожденных ЛДО с постоянными коэффициентами и невырожденных обыкновенных ЛДО с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами ([6], теоремы 5.1, 3.1). Ясно, что более широкие возможности для справедливости теорем о нулях ЛДО представляют решения однородного линейного дифференциального уравнения в семействе модулей. В частности, перспективным выглядит использование решений в пространствах формальных степенных рядов. Другой целью работы является формулировка и доказательство формальной теоремы о делении ЛДО, в которой коэффициенты делимого могут быть произвольными функциями.

Материалы и методы

Теорема о нулях для одного D -модуля. Здесь Ω – область в $\mathbb{R}^n$, θ – подалгебра алгебры бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$, содержащая единицу и все производные своих элементов (кольцо коэффициентов), $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ – порядок α , $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, $\alpha! = (\alpha_1)! (\alpha_2)! \dots (\alpha_n)!$, $P = P(x, \partial) = \sum_\alpha a_\alpha(x) \partial^\alpha$ – скалярный линейный дифференциальный оператор с коэффициентами $a_\alpha(x) \in \theta$. ЛДО P действует на дифференцируемую функцию v по стандартному правилу $Pv(x) = \sum_\alpha a_\alpha(x) \partial^\alpha v(x)$. Операции над ЛДО согласованы с действием операторов на функции. Порядком ЛДО P называется наибольший порядок $|\alpha|$ его ненулевых коэффициентов $a_\alpha(x)$.

Пусть $D = D(\theta)$ – алгебра скалярных линейных дифференциальных операторов конечного порядка с коэффициентами $a_\alpha(x) \in \theta$, $D(r, m)$ – множество матричных ЛДО $P = \|P_{ij}\|$ размера $r \times m$ с элементами $P_{ij} \in D$, $P_i = (P_{i1}, \dots, P_{im})$ – i -я строка ЛДО P , $D^m(P)$ – подмодуль свободного левого D -модуля $D^m \approx D(1, m)$ с образующими P_i , $\mathfrak{M}_P = D^m / D^m(P)$ – левый фактормодуль, V – левый унитарный D -модуль, $v = (v_1, \dots, v_m) \in V^m$, $P_i v = (P_{i1}, \dots, P_{im})(v_1, \dots, v_m)^t = P_{i1}v_1 + \dots + P_{im}v_m$ (t – символ транспонирования), $Pv = (P_1v, \dots, P_rv)^t$, $V_P^m = \{v \in V^m : Pv = 0\}$ – подпространство решений уравнения (системы уравнений) $Pv = 0$ в V^m (ядро $\ker P$ отображения $P: V^m \rightarrow V^r$), $D^m(P, V) = \{\beta \in D^m : \beta V_P^m = 0\}$. Умножение матричных ЛДО выполняется по обычному правилу умножения матриц и согласовано с действием ЛДО на векторные функции. Порядком матричного ЛДО называется наибольший из порядков его элементов P_{ij} .

Кольцо коэффициентов должно содержать все коэффициенты ЛДО P . При этом условии возможно множество разнообразных вариантов. Модуль V может совпадать с подпространством линейного пространства $C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$. Однако существуют другие возможности. Поэтому к формулировкам многих утверждений следует добавлять уточнения «над кольцом коэффициентов θ » и «для данного модуля V ».

Множество $A = D(m, m)$ по отношению к стандартным операциям над ЛДО является ассоциативной алгеброй с единицей. *Оператором дифференциальной симметрии уравнения $Pv = 0$ называется ЛДО $a \in A$ такой, что $aV_P^m \subseteq V_P^m$. Алгебра $A_P(V)$ таких операторов называется внешней алгеброй дифференциальной симметрии уравнения $Pv = 0$ над кольцом коэффициентов θ и для данного модуля V .*

Пусть $J_P = \{a \in A : a_i \in D^m(P)\}$, $J_P(V) = \{a \in A : aV_P^m = 0\}$ – левые идеалы алгебры A , $J_P \subseteq J_P(V)$, $A_P = \text{Norm } J_P = \{a \in A : J_P a \subseteq J_P\}$ – нормализатор идеала J_P . Очевидно, справедливы равенства:

$$V_P^m = \{v \in V^m : P_i v = 0, i = 1, \dots, r\} = \{v \in V^m : D^m(P)v = 0\} = \{v \in V^m : J_P v = 0\}.$$

Если $a \in A_P$, то $J_P a \subseteq J_P$, поэтому $J_P(aV_P^m) = (J_P a)V_P^m = 0$, $aV_P^m \subseteq V_P^m$. Значит, нормализатор идеала J_P состоит из операторов дифференциальной симметрии уравнения $Pv = 0$, $A_P \subseteq A_P(V)$. *Алгебра A_P называется внутренней алгеброй дифференциальной симметрии уравнения $Pv = 0$.*

Левый идеал J_P алгебры A является двусторонним идеалом своего нормализатора A_P , идеал $J_P(V)$ является двусторонним идеалом алгебры

$A_P(V)$. Идеалы J_P и $J_P(V)$ порождают только нулевые преобразования множества решений уравнения $Pv=0$, поэтому имеет смысл рассматривать факторалгебры $T_P = A_P/J_P$ и $T_P(V) = A_P(V)/J_P(V)$. Факторалгебры T_P и $T_P(V)$ называются внутренней и внешней трансекторными алгебрами симметрии уравнения $Pv=0$.

Заметим, что на самом деле алгебра $A_P(V)$ является нормализатором левого идеала $J_P(V)$ алгебры A . Предварительно установим равенство $V_P^m = \{v \in V^m : J_P(V)v=0\}$. Действительно, $V_P^m \subseteq \cap \{V_a^m : a \in J_P(V)\}$, потому что все элементы $J_P(V)$ обращаются в нуль на V_P^m . С другой стороны, $J_P \subseteq J_P(V)$, поэтому $\cap \{V_a^m : a \in J_P(V)\} \subseteq V_P^m$. Если теперь $a \in \text{Norm } J_P(V)$, т.е. $J_P(V)a \subseteq J_P(V)$, то верны равенства $J_P(V)(aV_P^m) = (J_P(V)a)V_P^m = 0$. Так как $V_P^m = \{v \in V^m : J_P(V)v=0\}$, то $aV_P^m \subseteq V_P^m$, $\text{Norm } J_P(V) \subseteq A_P(V)$. Наоборот, если $aV_P^m \subseteq V_P^m$, то $J_P(V)(aV_P^m) = (J_P(V)a)V_P^m = 0$, следовательно, $J_P(V)a \subseteq J_P(V)$, $a \in \text{Norm } J_P(V)$, т.е. $A_P(V) \subseteq \text{Norm } J_P(V)$, и верно равенство $\text{Norm } J_P(V) = A_P(V)$.

Определение 1. Для ЛДО $P \in D(r, m)$ выполняется теорема о нулях над кольцом коэффициентов θ и для D -модуля V , если справедливо равенство $D^m(P, V) = D^m(P)$.

Определение 2. Говорят, что ЛДО $G \in D(s, m)$ делится на ЛДО $P \in D(r, m)$ над кольцом коэффициентов θ , если существует такой ЛДО $L \in D(s, r)$, что выполняется равенство $G = LP$.

Теперь можно прояснить аналогию между теоремой о нулях ЛДО и теоремой Гильберта. Роль алгебраического многообразия в теоремах о нулях ЛДО играет множество решений V_P^m однородной линейной системы дифференциальных уравнений $Pv=0$. На роль идеала теоремы Гильберта претендует подмодуль $D^m(P)$. Роль радикала играет подмодуль $D^m(P, V)$. А в теоремах о нулях ЛДО выдвигаются условия, при выполнении которых возникает равенство $D^m(P, V) = D^m(P)$. Последнее равенство играет роль аналога утверждения, что идеал Гильберта является радикальным. Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда внешние и внутренние алгебры дифференциальной симметрии системы $Pv=0$ совпадают. Следовательно, понятие теоремы о нулях ЛДО непосредственно связано с названием и основным содержанием статьи [6].

В следующем предложении представлены условия, равносильные формулировке основного определения теоремы о нулях для D -модуля V .

Предложение 1 ([6], теоремы 2.1, 2.2). Теорема о нулях ЛДО $P \in D(r, m)$ над кольцом коэффициентов θ для D -модуля V выполняется

тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

1. ЛДО $G \in D(s, m)$ делится на ЛДО $P \in D(r, m)$ над кольцом коэффициентов θ тогда и только тогда, когда $V_P^m \subseteq V_G^m$.
2. Верно равенство $J_P(V) = J_P$.
3. Справедливы равенства $A_P = A_P(V)$, $T_P = T_P(V)$.
4. D -гомоморфизмы фактормодуля $\mathfrak{M}_P = D^m / D^m(P)$ в модуль V разделяют точки $\mathfrak{M}_P$.

Доказательство:

1. Предположим, что условие делимости « $G = LP$ тогда и только тогда, когда $V_P^m \subseteq V_G^m$ » выполняется для любого ЛДО $G \in D(s, m)$. Тогда это условие должно выполняться и для ЛДО $G \in D(1, m) \approx D^m$. Но ЛДО $G \in D(1, m)$ имеет вид LP тогда и только тогда, когда верны равенства $G = (a_1, \dots, a_r)P = \sum_i a_i P_i$, $L = (a_1, \dots, a_r)$, $a_i \in D$. То есть ЛДО $G \in D(1, m)$ делится на ЛДО $P \in D(r, m)$ тогда и только тогда, когда $G \in D^m(P)$. Следовательно, если выполняется общее условие делимости, то выполняется и равенство $D^m(P, V) = D^m(P)$.

Наоборот, равенство $D^m(P, V) = D^m(P)$ означает, что если ЛДО $G \in D(1, m)$ обращается в нуль на решениях системы $Pv = 0$, то G принадлежит $D^m(P)$, и, значит, делится на ЛДО P . Пусть теперь $G \in D(s, m)$, $s > 1$. Так как $Gv = (G_1v, \dots, G_sv) = (0, \dots, 0)$, то равенство $Gv = 0$ эквивалентно равенствам $G_iv = 0$ для всех $i = 1, \dots, s$. Значит, $V_P^m \subseteq V_G^m$ тогда и только тогда, когда $V_P^m \subseteq V_{G_i}^m$. И тогда существуют ЛДО $L_i \in D(1, r)$ такие, что $G_i = L_i P$. Полагая $L = (L_1, \dots, L_s)^t \in D(s, r)$, получим равенство $G = LP$.

2. Любой ЛДО $G \in D^m(P, V)$ может быть представлен как строка элемента идеала $J_P(V)$. Поэтому $J_P(V) = J_P$ тогда и только тогда, когда $D^m(P, V) = D^m(P)$.

3. Алгебры A_P и $A_P(V)$ являются нормализаторами левых идеалов J_P и $J_P(V)$. Поэтому из равенства $J_P(V) = J_P$ вытекает равенство $A_P = A_P(V)$. В общем могут быть два вложенных левых идеала $J_P \subset J_P(V)$ алгебры A . Пересечение нормализаторов этих идеалов $A_P \cap A_P(V)$ состоит из элементов $a \in A$, которые удовлетворяют условиям $J_P(V)a \subseteq J_P(V)$ и $J_P a \subseteq J_P$. Нормализаторы будут совпадать тогда и только тогда, когда любой оператор дифференциальной симметрии уравнения $Pv = 0$ будет удовлетворять условиям $J_P a \subseteq J_P$ и $(J_P(V) \setminus J_P)a \subseteq J_P(V)$. Но если выполняются два равенства $A_P = A_P(V)$ и $T_P = T_P(V)$, то предположение $J_P \subset J_P(V) \subset A_P$ приводит

к противоречию. При таком предположении $A_P(V)/J_P(V) = A_P/J_P(V) \neq A_P/J_P$, т.е. $T_P(V) \neq T_P$.

4. Пусть $\sigma: D^m \rightarrow \mathfrak{M}_P = D^m/D^m(P)$ – естественный эпиморфизм D -модулей, $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, m$, единица на i -м месте – стандартная система образующих свободного модуля D^m ; $\varphi \in \text{hom}_D(\mathfrak{M}_P, V)$, $\bar{\beta} \in \mathfrak{M}_P$, $\beta = \sum_i \beta_i e_i$ – представитель $\bar{\beta}$ в D^m , $v_i = \varphi(\sigma(e_i)) \in V$, $v = (v_1, \dots, v_m) \in V^m$. Тогда $\varphi(\bar{\beta}) = \varphi(\sigma(\beta)) = \varphi(\sigma(\sum_i \beta_i e_i)) = \sum_i \beta_i \varphi(\sigma(e_i)) = \sum_i \beta_i v_i = \varphi_v(\beta) = \beta v$. Если $\beta \in D^m(P)$, то верны равенства: $\varphi(\bar{\beta}) = \varphi(\sigma(\beta)) = \varphi(0) = \beta v = 0$. Следовательно, любой D -гомоморфизм $\varphi: \mathfrak{M}_P \rightarrow V$ задается элементом $v = (\varphi(\sigma(e_1)), \dots, \varphi(\sigma(e_m))) \in V_P^m$, $\varphi(\bar{\beta}) = \varphi(\sigma(\beta)) = \varphi_v(\beta) = \beta v$. Наоборот, если $v \in V_P^m$, то последние равенства задают гомоморфизм $\varphi_v \in \text{hom}_D(\mathfrak{M}_P, V)$.

D -гомоморфизмы фактормодуля $\mathfrak{M}_P = D^m/D^m(P)$ в модуль V разделяют точки $\mathfrak{M}_P$, если для любого элемента $\bar{\beta} \in \mathfrak{M}_P$ существует такой гомоморфизм $\varphi_v \in \text{hom}_D(\mathfrak{M}_P, V)$, что $\varphi_v(\bar{\beta}) = \beta v \neq 0$. Гомоморфизмы не разделяют точки $\mathfrak{M}_P$, если существуют такие элементы $\bar{\beta} \in \mathfrak{M}_P$, на которых все гомоморфизмы обращаются в нуль. Гомоморфизмы разделяют точки $\mathfrak{M}_P$ тогда и только тогда, когда пересечение ядер всех гомоморфизмов равно нулю: $\cap \{\ker \varphi: \varphi_v \in \text{hom}_D(\mathfrak{M}_P, V)\} = 0$. Равенство $\varphi_v(\bar{\beta}) = \beta v = 0$ при всех $v \in V_P^m$ означает, что ЛДО $\beta \in D^m(P, V)$. Следовательно, прообраз пересечения ядер D -гомоморфизмов $\mathfrak{M}_P$ в V $\sigma^{-1}\left(\left\{\bar{\beta}: \varphi_v(\bar{\beta}) = 0 \quad \forall v \in V_P^m\right\}\right)$ совпадает с подмодулем $D^m(P, V)$. Поэтому $\cap \{\ker \varphi: \varphi \in \text{hom}_D(\mathfrak{M}_P, V)\} = 0$ тогда и только тогда, когда верно равенство $D^m(P, V) = D^m(P)$. Значит условие 4 эквивалентно определению 1.

Результаты

Теоремы о нулях ЛДО для семейства D -модулей. В данном разделе вместо одного D -модуля V рассматривается семейство D -модулей $\{V_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$. При этом понятие теоремы о нулях ЛДО и утверждения предыдущего раздела изменяются. Точнее, изменяются понятия, которые связаны с D -модулями V_γ . Прежние условия действия ЛДО a на элементы модуля V^m должны теперь заменяться на аналогичные условия действия ЛДО на каждый модуль V_γ^m . Поэтому множество ЛДО, удовлетворяющих некоторым однотипным условиям, должно совпадать с пересечением соответствующих подмножеств операторов. Понятно также, что теперь к формулировкам раз-

личных утверждений вместо уточнения «для данного модуля V » надо добавлять уточнение «для семейства модулей $\{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ ». В частности, определение оператора дифференциальной симметрии может иметь следующий вид.

Оператором дифференциальной симметрии уравнения $Pv=0$ над кольцом коэффициентов θ и для данного семейства D -модулей $\{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ называется ЛДО $a \in A$ такой, что $\{a(V_\gamma^m)_P \subseteq (V_\gamma^m)_P, \gamma \in \Gamma\}$. Алгебра $A_P\{V_\gamma\}$ таких операторов называется внешней алгеброй дифференциальной симметрии уравнения $Pv=0$.

Определение того же объекта можно представить в равносильной форме. Оператором дифференциальной симметрии уравнения $Pv=0$ называется элемент алгебры A , принадлежащий множеству $\cap\{A_P(V_\gamma), \gamma \in \Gamma\}$. Внешней алгеброй дифференциальной симметрии уравнения $Pv=0$ над кольцом коэффициентов θ и для данного семейства D -модулей $\{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ называется алгебра $A_P\{V_\gamma\} = \cap\{A_P(V_\gamma), \gamma \in \Gamma\}$. Аналогично определяются алгебра $J_P\{V_\gamma\} = \cap\{J_P(V_\gamma), \gamma \in \Gamma\}$ и подмодуль $D^m(P, \{V_\gamma\}) = \cap\{D^m(P, V_\gamma), \gamma \in \Gamma\}$ модуля $D^m(P)$. Определение внешней трансвекторной алгебры дифференциальной симметрии уравнения $Pv=0$ принимает вид $T_P\{V_\gamma\} = A_P\{V_\gamma\} / J_P\{V_\gamma\}$.

Определению понятия теоремы о нулях в случае семейства D -модулей можно придать вид.

Определение 3. Для ЛДО $P \in D(r, m)$ выполняется теорема о нулях над кольцом коэффициентов θ и для семейства D -модулей $\{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, если справедливо равенство $D^m(P, \{V_\gamma\}) = D^m(P)$. Но можно представить это же определение в равносильной форме. Для ЛДО $P \in D(r, m)$ выполняется теорема о нулях над кольцом коэффициентов θ и для семейства D -модулей $\{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, если ЛДО $G \in D(1, m)$ обращается в нуль на всех решениях уравнения $Pv=0$ во всех модулях V_γ^m тогда и только тогда, когда он принадлежит модулю $D^m(P)$.

Среди теорем о нулях мы выделяем несколько частных случаев. Если V – подмодуль D -модуля C^∞ , то соответствующая теорема о нулях называется глобальной (над кольцом θ относительно D -модуля V). Если в качестве семейства D -модулей $\{V_\gamma\}$ рассматривается подсемейство ростков бесконечно дифференцируемых или вещественно аналитических функций, то теоремы о нулях называются локальными. Если в качестве семейства

D -модулей $\{V_\gamma\}$ рассматривается подсемейство формальных степенных рядов, то теоремы о нулях называются формальными.

В следующей теореме приводятся условия, эквивалентные теореме о нулях для семейства D -модулей $\{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.

Теорема 1. Теорема о нулях ЛДО $P \in D(r, m)$ над кольцом коэффициентов θ для семейства D -модулей $\{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ выполняется тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

1. ЛДО $G \in D(s, m)$ делится на ЛДО $P \in D(r, m)$ над кольцом коэффициентов θ тогда и только тогда, когда $(V_\gamma^m)_P \subseteq (V_\gamma^m)_G$ при всех $\gamma \in \Gamma$.

2. Справедливо равенство $J_P\{V_\gamma\} = J_P$.

3. Справедливо равенство алгебр $A_P\{V_\gamma\} = A_P$ и равенство факторалгебр $T_P\{V_\gamma\} = T_P$.

4. Гомоморфизмы D -модуля $\mathfrak{M}_P = D^m / D^m(P)$ в D -модули V_γ для всех $\gamma \in \Gamma$ разделяют точки $\mathfrak{M}_P$.

Доказательство:

1. Пусть сначала $G \in D(1, m) \approx D^m$. Условие $G \in D^m(P, \{V_\gamma\})$ означает, что $G \in D^m(P, V_\gamma)$ при всех $\gamma \in \Gamma$, т.е. $G \in D^m(P, \{V_\gamma\})$ тогда и только тогда, когда $(V_\gamma^m)_P \subseteq (V_\gamma^m)_G$ при всех $\gamma \in \Gamma$. ЛДО G делится на P , т.е. имеет вид $G = (a_1, \dots, a_r)P = \sum_i a_i P_i$ $a_i \in D$, $i = 1, \dots, r$, тогда и только тогда, когда $G \in D^m(P)$. Поэтому условие теоремы о нулях $D^m(P, \{V_\gamma\}) = D^m(P)$ эквивалентно условию: любой ЛДО $G \in D(1, m)$ делится на ЛДО $P \in D(r, m)$ тогда и только тогда, когда $(V_\gamma^m)_P \subseteq (V_\gamma^m)_G$. Пусть теперь $G \in D(s, m)$, $s > 1$. Равенство $Gv = 0$ эквивалентно равенствам $G_i v = 0$, $i = 1, \dots, s$, для строк G_i ЛДО G . Значит, $(V_\gamma^m)_P \subseteq (V_\gamma^m)_G$ при всех $\gamma \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $(V_\gamma^m)_P \subseteq (V_\gamma^m)_{G_i}$. И тогда существуют ЛДО $L_i \in D(1, r)$ такие, что верны равенства $G_i = L_i P$. Полагая $L = (L_1, \dots, L_s)^t \in D(s, r)$, получим равенство $G = LP$.

2. Для ЛДО $a \in A$ условие $a \in J_P\{V_\gamma\}$ означает, что $a \in J_P(V_\gamma)$ для всех $\gamma \in \Gamma$. То есть этот ЛДО обращается в нуль на решениях уравнения $Pv = 0$ в D -модуле V_γ^m для всех $\gamma \in \Gamma$. Но тогда, в соответствии с первым пунктом этой теоремы, ЛДО a делится на ЛДО P , т.е. имеет вид $a = bP$ для некоторого ЛДО $b \in D(m, r)$. Последнее равенство означает, что любая стро-

ка a_i ЛДО a является линейной комбинацией строк ЛДО P с коэффициентами из алгебры D , значит, $a_i \in D^m(P)$ и $a \in J_P$.

3. Равенства пункта 3 формулировки теоремы 1 приводят к равенству $A_P / J_P \{V_\gamma\} = A_P / J_P$. В общем случае $J_P \subseteq J_P \{V_\gamma\}$, но если это включение является строгим, то факторалгебры алгебры A_P по таким идеалам не могут совпадать. Следовательно, верно равенство $J_P \{V_\gamma\} = J_P$. И условие 3 теоремы 1 эквивалентно условию 2.

4. Как показано в пункте 4 доказательства предложения 1, любой D -гомоморфизм $\varphi: \mathfrak{M}_P \rightarrow V_\gamma$ задается элементом $v_\gamma \in (V_\gamma^m)_P$ и имеет вид $\varphi_{V_\gamma}(\bar{\beta}) = \beta v_\gamma$, где $\bar{\beta} \in \mathfrak{M}_P$, β – представитель $\bar{\beta}$ в D^m . Равенство $\varphi_{V_\gamma}(\bar{\beta}) = \beta v_\gamma = 0$ при всех $v_\gamma \in (V_\gamma^m)_P$ означает, что ЛДО $\beta \in D^m(P, V_\gamma)$. Гомоморфизмы D -модуля $\mathfrak{M}_P = D^m / D^m(P)$ в D -модули V_γ для всех $\gamma \in \Gamma$ разделяют точки $\mathfrak{M}_P$ тогда и только тогда, когда $\cap \{ \ker \varphi: \varphi \in \text{hom}_D(\mathfrak{M}_P, V_\gamma), \gamma \in \Gamma \} = 0$. Последнее условие эквивалентно равенству $\cap \{ D^m(P, V_\gamma), \gamma \in \Gamma \} = D^m(P)$, т.е. равенству $D^m(P, \{V_\gamma\}) = D^m(P)$, которое служит определением теоремы о нулях для семейства D -модулей $\{V_\gamma\}$.

В заключение этого пункта заметим, что случай семейства D -модулей можно формально свести к одному модулю. Для этого нужно заменить семейство D -модулей прямым произведением $\prod_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma$.

Формальная теорема о делении линейных дифференциальных операторов

Определение 4. Теоремами о делении ЛДО $P \in D(r, m)$ для D -модуля V или семейства D -модулей $\{V_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ называются теоремы, в которых утверждается, что если $G \in D(1, m)$ и $V_P^m \subseteq V_G^m$ или, соответственно, $(V_\gamma)_P^m \subseteq (V_\gamma)_G^m$ для любого $\gamma \in \Gamma$, то существует ЛДО L размера $1 \times r$ такой, что верно равенство $G = LP$. При этом коэффициенты ЛДО L могут не принадлежать кольцу θ , на них могут накладываться особые условия, наконец, коэффициенты ЛДО L могут быть произвольными функциями. Следующий пример показывает, что такое определение имеет право на существование.

Пример 1. Здесь $n = 1$, $\partial = d/dx$, $\Omega = (-\infty, +\infty)$, $P = x\partial - 1$. Формальные решения уравнения $(x\partial - 1)v = 0$ в точке x_0 разыскиваем в виде ряда

$v = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$. Подставив ряд в преобразованное уравнение

$(x - x_0)v' + x_0v' - v = 0$ и собрав коэффициенты при одинаковых степенях двучлена $(x - x_0)$, получим уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n(n-1) + x_0c_{n+1}(n+1))(x - x_0)^n - c_0 + x_0c_1 = 0. \quad (1)$$

Приравняв к нулю коэффициенты при степенях $(x - x_0)^n$ в (1), получим равенство $(c_n(n-1) + x_0c_{n+1}(n+1)) = 0$ при значениях $n \geq 1$ и равенство $(-c_0 + x_0c_1) = 0$. Если $x_0 \neq 0$, то $c_1 = \frac{c_0}{x_0}$. При значении $n = 1$ выполняется равенство $2x_0c_2 = 0$, следовательно $c_2 = 0$. Если $n > 1$, то $n + 1 \geq 2$ и равенства $(c_n(n-1) + x_0c_{n+1}(n+1)) = 0$ показывают, что $c_n = 0$ при $n \geq 2$. Формальные решения уравнения $Pv = 0$ имеют вид $v = \frac{c_0}{x_0}(x - x_0) + c_0 = \frac{c_0}{x_0}x = c_1x$, где c_1 – любое число. Если $x_0 = 0$, то (1) принимает следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(n-1)x^n - c_0 = 0, \quad c_0 = 0, \quad c_n = 0 \text{ при } n > 1, \quad v = c_1x.$$

Таким образом, все формальные решения уравнения $xv' - v = 0$ совпадают с обычными решениями и являются решениями уравнения $\partial^2 v = 0$. Но ЛДО $G = \partial^2$ не делится на ЛДО P над кольцом C^∞ . А ЛДО $L = a(x)\partial^2 + b(x)\partial$ с разрывными коэффициентами $a(0) = 1, b(0) = 0$ – любое число и $a(x) = 0, b(x) = 1/x$ при значениях $x \neq 0$ удовлетворяет условию $\partial^2 = L(x\partial - 1)$. Действительно:

$$\begin{aligned} LP &= (a(x)\partial^2 + b(x)\partial)(x\partial - 1) = (a(x)\partial + b(x))\partial(x\partial - 1) = \\ &= (a(x)\partial + b(x))(x\partial^2 + \partial - \partial) = (a(x)\partial + b(x))x\partial^2 = \\ &= a(x)x\partial^3 + a(x)\partial^2 + b(x)x\partial^2. \end{aligned}$$

$$\text{При } x = 0: LP = a(x)x\partial^3 + a(x)\partial^2 + b(x)x\partial^2 = 1 \cdot 0 \cdot \partial^3 + 1 \cdot \partial^2 + b(0) \cdot 0 \cdot \partial^2 = \partial^2.$$

$$\text{При } x \neq 0: LP = a(x)x\partial^3 + a(x)\partial^2 + b(x)x\partial^2 = 0 \cdot x\partial^3 + 0 \cdot \partial^2 + \frac{1}{x} \cdot x \cdot \partial^2 = \partial^2.$$

Пусть F_x – линейное пространство степенных рядов с центром в точке x , v_0 – свободный член формального ряда $v \in F_x$; DO – множество скалярных ЛДО с произвольными коэффициентами; DC – алгебра ЛДО с постоянными коэффициентами; $DC(r, m)$, $DO(r, m)$ – соответствующие множества матричных ЛДО размера $r \times m$. Символом G_x обозначается ЛДО с постоянными коэффициентами, равными значениям коэффициентов ЛДО G в точке $x \in \Omega$.

Теорема 2 (формальная теорема о делении ЛДО). Пусть $\theta = C^\infty$, $P \in D(r, m)$, $G \in D(1, m)$. Если любое формальное решение системы $Pv = 0$ в области Ω является решением системы $Gv = 0$, то существует ЛДО $L \in DO(1, r)$ такой, что верно равенство $G = LP$.

Доказательство. Отождествим ЛДО $b = (b_1, \dots, b_m) \in DC^m$ с линейным функционалом на пространстве $(F_x)^m$: $v = (v_1, \dots, v_m)^t \in (F_x)^m$, $v \rightarrow \langle v, b \rangle = b(v) = (bv)_0$. При умножении ЛДО коэффициенты левого множителя не дифференцируются. Поэтому для операторов $L \in DO(1, r)$, $P \in D(r, m)$, $\gamma \in D(1, m)$ и ряда $v \in F_x^m$ выполняются равенства $(LP)_x = (L_x P)_x$, $(\gamma v)_0 = (\gamma_x v)_0$. Если $v \in (F_x)_P^m$ и $Gv = 0$, то $(Gv)_0 = (G_x v)_0 = \langle v, G_x \rangle = G_x(v) = 0$, т.е. функционалы G_x обращаются в нуль на всех формальных решениях системы $Pv = 0$. Следовательно, для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что если $G_x(v) = \langle v, G_x \rangle = 0$ для всех $v \in (F_x)_P^m$ и всех $x \in \Omega$, то существует ЛДО $L \in DO(1, r)$ такой, что справедливо равенство $G = LP$.

Следующая теорема имеет более общий характер, чем это необходимо для доказательства теоремы 2. Дело в том, что если коэффициенты ЛДО G не являются бесконечно дифференцируемыми функциями, то действие G на формальные степенные ряды не определено. Но функционалы G_x определены корректно.

Теорема 3. Пусть $\theta = C^\infty$, $P \in D(r, m)$, $G \in DO^m \approx DO(1, m)$. ЛДО $L \in DO^r \approx DO(1, r)$ такой, что $G = LP$, существует тогда и только тогда, когда $G_x((F_x)_P^m) = 0$ для всех $x \in \Omega$, т.е. тогда и только тогда, когда функционалы G_x обращаются в нуль на всех формальных решениях системы $Pv = 0$.

Доказательство. В общей теории линейных локально выпуклых пространств [11, гл. II; 12] пара линейных пространств E , E' называется дуальной по отношению к билинейной форме $\langle e, e' \rangle$, заданной на декартовом произведении $E \times E'$, если эта форма невырожденная. В таком случае пространства E' и E можно отождествить с подпространствами алгебраически сопряженных пространств E^* и $(E')^*$, полагая $e'(e) = \langle e, e' \rangle$ и $e(e') = \langle e, e' \rangle$.

Теорема 4. Пусть $b = (b_1, \dots, b_m) \in DC^m$, $v = (v_1, \dots, v_m)^t \in (F_x)^m$. Пара линейных пространств $E = F_x^m$, $E' = DC^m$ является дуальной по отношению к билинейной форме $\langle v, b \rangle = (bv)_0 = \left(\sum_{j=1}^m b_j v_j \right)_0$. При этом алгебраически сопряженное к пространству DC^m пространство $(DC^m)^*$ отождествляется с пространством формальных степенных рядов: $F_x^m = (DC^m)^*$.

Доказательство. Пусть $f^{\beta,i} = (0, \dots, (y-x)^\beta / \beta!, \dots, 0)^t$ – элемент F_x^m , у которого только i -я компонента отлична от нуля; $e_{\alpha,j} = (0, \dots, \partial^\alpha, \dots, 0)$ – элемент DC^m , у которого от нуля отлична j -я компонента. Если $i \neq j$, то $\langle f^{\beta,i}, e_{\alpha,j} \rangle = 0$. Если $i = j$, то возникает равенство

$$\langle f^{\beta,i}, e_{\alpha,i} \rangle = \left(\partial_y^\alpha (y-x)^\beta / \beta! \right)_{y=x} = \prod_{i=1}^m \left(\partial_{y_i}^{\alpha_i} (y_i - x_i)^{\beta_i} / \beta_i! \right)_{y_i=x_i}.$$

Производная $\partial_{y_i}^{\alpha_i} (y_i - x_i)^{\beta_i}$ при значениях $\beta_i < \alpha_i$ тождественно равна нулю. В результате дифференцирования при значениях $\beta_i > \alpha_i$ возникнет выражение $\beta_i(\beta_i - 1) \cdots (\beta_i - \alpha_i)(y_i - x_i)^{\beta_i - \alpha_i} / \beta_i!$. Это выражение обращается в нуль при значении $y_i = x_i$. Если $\beta_i = \alpha_i$, то последнее выражение принимает вид $\beta_i(\beta_i - 1) \cdots 1 / \beta_i! = \beta_i! / \beta_i! = 1$. Поэтому справедливы равенства:

$$\langle f^{\beta,i}, e_{\alpha,j} \rangle = \delta_{\beta\alpha} \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & (\beta, i) = (\alpha, j), \\ 0, & (\beta, i) \neq (\alpha, j). \end{cases} \quad (2)$$

Пусть $b_\alpha = (b^{\alpha,1}, \dots, b^{\alpha,m}) \in \mathbb{C}^m$, $c_\beta = (c_{\beta,1}, \dots, c_{\beta,m})^t \in \mathbb{C}^m$. Формальный ряд $v \in F_x^m$ можно записать в форме $v = \sum_\beta c_\beta (y-x)^\beta / \beta! = \sum_{\beta,i} c_{\beta,i} f^{\beta,i}$. А ЛДО $b \in DC^m$ представить в виде конечной суммы $b = \sum_\alpha b_\alpha \partial^\alpha = \sum_{\alpha,j} b^{\alpha,j} e_{\alpha,j}$. Применим формулы (2), получим равенства:

$$\langle v, b \rangle = (bv)_0 = \left(\sum_{j=1}^m b_j v_j \right)_0 = \left\langle \sum_{\alpha,j} b^{\alpha,j} e_{\alpha,j}, \sum_{\beta,i} c_{\beta,i} f^{\beta,i} \right\rangle,$$

$$\langle v, b \rangle = \sum_{\beta,i} \sum_{\alpha,j} c_{\beta,i} b^{\alpha,j} \langle f^{\beta,i}, e_{\alpha,j} \rangle = \sum_{\alpha,j} c_{\alpha,j} b^{\alpha,j}, \quad (3)$$

$$\langle v, e_{\alpha,j} \rangle = c_{\alpha,j}, \quad \langle f^{\alpha,j}, b \rangle = b^{\alpha,j}. \quad (4)$$

Равенства (4) показывают, что форма $(v, b) \rightarrow \langle v, b \rangle$ невырожденная. В линейном пространстве DC^m элементы $e_{\alpha,j}$ образуют счетный алгебраический базис. Из равенств (2) следует, что система элементов $f^{\beta,i}$ является двойственной (дуальной) по отношению к этому базису. Любой линейный функционал $\phi \in (DC^m)^*$ однозначно определяется своими значениями $\langle \phi, e_{\alpha,j} \rangle = c_{\alpha,j}$ на элементах базиса $e_{\alpha,j}$ и имеет вид (3). Поэтому можно построить координатный изоморфизм $(DC^m)^* \rightarrow F_x^m$, $\phi \rightarrow v_\phi = \sum_{\alpha,j} \langle \phi, e_{\alpha,j} \rangle f^{\alpha,j}$, и таким образом отождествить функционал с соответ-

ствующим формальным рядом. Понятно также, что пространство DC^m можно отождествить с пространством последовательностей комплексных чисел, у которых только конечное число членов отлично от нуля. А пространство F_x^m отождествляется с линейным пространством всех последовательностей комплексных чисел. Теорема 3 доказана.

С помощью преднорм $p_{e'}(e) = \langle e, e' \rangle$ и $p_e(e') = \langle e, e' \rangle$ в пространствах E и E' можно задать слабые топологии $\sigma(E, E')$ и $\sigma(E', E)$. Пусть E, E' и S, S' – дуальные пары линейных пространств, t – линейное отображение E в S , t^* – отображение из пространства S^* в E^* , алгебраически сопряженное к отображению t (композиция $s^* \circ t$, $(t^*(s^*))(e) = (s^* \circ t)(e) = s^*(te)$). Символом t' обозначается ограничение отображения t^* на S' .

Предложение 2 [11, гл. II, предложение 12]. Отображение t непрерывно относительно слабых топологий $\sigma(E, E')$ и $\sigma(S, S')$ тогда и только тогда, когда образ оператора t' принадлежит пространству E' .

Предположим теперь, что $\theta = C^\infty$, $E = F_x^m$, $E' = DC^m$ и $S = F_x^r$, $S' = DC^r$ – дуальные пары. Роль оператора t играет линейное отображение $P: F_x^m \rightarrow F_x^r$, порожденное ЛДО $P \in D(r, m)$. Пусть $P^*(x) \in \text{hom}_{\mathbb{C}}((F_x^r)^*, (F_x^m)^*)$ – оператор, сопряженный к отображению P , $P'(x)$ – ограничение $P^*(x)$ на подпространство $DC^r \subset (F_x^r)^*$ и $a \in DC^r$.

Лемма 1. Справедливо равенство $P'(x)a = (aP)_x$. Оператор $P: F_x^m \rightarrow F_x^r$ непрерывен по отношению к слабым топологиям $\sigma(F_x^m, DC^m)$, $\sigma(F_x^r, DC^r)$, т.е. слабо непрерывен.

Доказательство. Если $a \in DC^r$, $v \in F_x^m$, то верны равенства:

$$\langle v, P'(x)a \rangle = \langle Pv, a \rangle = (a(Pv))_0 = ((aP)v)_0 = ((aP)_x v)_0 = \langle v, (aP)_x \rangle.$$

Форма $\langle v, b \rangle$ невырождена, поэтому равенство $P'(x)a = (aP)_x$ выполняется. G_x – это ЛДО с постоянными коэффициентами, равными значениям коэффициентов G в точке $x \in \Omega$. Следовательно, $(aP)_x \in DC(1, m) \approx DC^m = E'$, оператор $P'(x)$ отображает пространство $S' = DC^r$ в пространство $E' = DC^m$. Из предложения 2 вытекает, что оператор $P'(x)$ слабо непрерывен.

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 3. Равенство $G = LP$ выполняется тогда и только тогда, когда $G_x = (LP)_x$ в каждой точке $x \in \Omega$. Но $(LP)_x = (L_x P)_x$. Полагая в лемме 1 $a = L_x \in DC^r$, получим равенство $(L_x P)_x = P'(x)L_x$. Следовательно уравнение $G = LP$ эквивалентно се-

рии уравнений $P'(x)L_x = G_x$, $x \in \Omega$. Надо показать, что условие $G_x((F_x)_P^m) = 0$ теоремы 3 достаточно для существования оператора $L_x \in DC^r$ такого, что выполняется равенство $P'(x)L_x = G_x$. То есть надо доказать, что уравнение $P'(x)L_x = G_x$ разрешимо. В предложении 3 вопрос о разрешимости такого рода уравнений в линейных локально выпуклых пространствах проясняется в общем случае.

Предложение 3 [12, теорема 1]. Пусть E, E' и S, S' – дуальные пары линейных пространств; t – слабо непрерывное линейное отображение пространства E в пространство S ; $\ker t = \{e \in E : t(e) = 0\}$ – ядро отображения t ; $t's' = e'$ – уравнение с неизвестным $s' \in S'$; $\text{im } t'$ – образ оператора t' в пространстве E' . Равенство $e'(\ker t) = 0$ является необходимым условием разрешимости уравнения $t's' = e'$. Равенство $e'(\ker t) = 0$ достаточно для разрешимости уравнения $t's' = e'$ только тогда, когда образ оператора t' замкнут в топологии $\sigma(E', E)$.

Наконец, в предложении 4 приводятся условия, выполнение которых гарантирует разрешимость уравнения $t's' = e'$.

Предложение 4 [12, теорема 2]. Если пространство E совпадает с алгебраически сопряженным к пространству E' пространством E^{**} , то уравнение $t's' = e'$ разрешимо тогда и только тогда, когда $e'(\ker t) = 0$.

И это как раз то, что необходимо для завершения доказательства теоремы 3. Действительно, в теореме 4 показано, что если в дуальной паре $E = F_x^m$, $E' = DC^m$ невырожденная форма задается равенством

$$\langle v, b \rangle = (bv)_0 = \left(\sum_{j=1}^m b_j v_j \right)_0, \text{ то пространство } E \text{ с помощью этой формы}$$

отождествляется с алгебраически сопряженным к E' пространством E^{**} . В соответствии с предложением 4 уравнение $P'(x)L_x = G_x$ при любом фиксированном значении $x \in \Omega$ имеет решение тогда и только тогда, когда $G_x((F_x)_P^m) = 0$. Теорема 3, а вместе с тем и теорема 2, доказаны.

Замечание. В теореме 2 можно заменить ЛДО $G \in D(1, m)$ на ЛДО $G \in D(s, m)$. Действительно, ЛДО $G \in D(s, m)$ делится на ЛДО $P \in D(r, m)$ тогда и только тогда, когда на ЛДО P делится любая его строка G_i . А равенство $Gv = 0$ эквивалентно равенствам $G_i v = 0$ при всех $i = 1, \dots, s$.

Обсуждение

В процессе достижения основных целей работы получены другие интересные факты. Построен оригинальный пример 1, который показывает, что для справедливости формальных теорем о нулях необходимо накладывать на дифференциальные операторы дополнительные условия, а в общем случае верна только формальная теорема о делении. Оригинальным образом использована дуальная пара линейных пространств (теорема 4).

Заключение

Основные заявленные цели работы достигнуты: дано определение понятия теоремы о нулях для семейства возможных решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений; доказана общая теорема о делении линейных дифференциальных операторов для семейства формальных решений. Эта теорема должна служить ключом к доказательству формальных теорем о нулях ЛДО над кольцом бесконечно дифференцируемых функций и над другими кольцами коэффициентов.

Список литературы

1. Овсянников А. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 398 с.
2. Ибрагимов И. Х. Группы преобразований в математической физике. М. : Наука, 1983. 281 с.
3. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / пер. с англ. И. Г. Щербак ; под ред. А. Б. Шабата. М. : Мир, 1989. 637 с.
4. Фушич В. И., Никитин А. Г. Симметрия уравнений квантовой механики. М. : Наука, 1990. 404 с.
5. Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. [и др.]. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / под ред. А. М. Виноградова, И. С. Красильщика. М. : Факториал, 1997. 461 с.
6. Fomin A. I. Differential symmetry algebras for linear homogeneous differential equations // Russian journal of mathematical physics. 1997. Vol. 5, № 2. P. 189–210.
7. Fomin A. I. Differential Homomorphisms of Linear Homogeneous Systems of Differential Equations // Russian journal of mathematical physics. 2012. Vol. 19, № 2. P. 159–181.
8. Желобенко Д. П. Трансвекторные алгебры в теории представлений и динамические симметрии // Теоретико-групповые методы в физике : в 2 т. М. : Наука, 1986. Т. 2. С. 5–21.
9. Желобенко Д. П. Представления редуктивных алгебр Ли. М. : Физматлит, 1994. 352 с.
10. Фомин А. И. Преобразования Лапласа как дифференциальные изоморфизмы // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии : сб. ст. по материалам XLIV–XLVIII Междунар. науч.-практ. конф. М. : Интернаука, 2016. № 8-12 (35). С. 5–12.
11. Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства / пер. с англ. Д. Ф. Борисовой ; под ред. и с прил. Д. А. Райкова. М. : Мир, 1967. 261 с.
12. Фомин А. И., Титаренко В. И. О разрешимости линейных операторных уравнений в линейных локально выпуклых пространствах // Научно-техническое развитие России и мир : сб. ст. XVII Междунар. науч.-практ. конф. Саратов : Научно-образовательная платформа «Цифровая наука», 2023. С. 23–30.

References

1. Ovsyannikov A.V. *Gruppovoy analiz differentsialnykh uravneniy* = Group analysis of differential equations. Moscow: Nauka, 1978:398. (In Russ.)
2. Ibragimov I.H. *Gruppy preobrazovaniy v matematicheskoy fizike* = Transformation groups in mathematical physics. Moscow: Nauka, 1983:281. (In Russ.)
3. Olver P. *Prilozheniye grupp Li k differentsialnym uravneniyam* = Application of Lie groups to differential equations. Transl. from Eng. by I.G. Shcherbak; ed. by A.B. Shabat. Moscow: Mir, 1989:637. (In Russ.)
4. Fushchich V.I., Nikitin A.G. *Simmetriya uravneniy kvantovoy mekhaniki* = Symmetry of the equations of quantum mechanics. Moscow: Nauka, 1990:404. (In Russ.)

5. Bocharov A.V., Verbovetskiy A.M., Vinogradov A.M. et al. *Simmetrii i zakony sokhraneniya uravneniy matematicheskoy fiziki = Symmetries and conservation laws of equations of mathematical physics*. Moscow: Faktorial, 1997:461. (In Russ.)
6. Fomin A.I. Differential symmetry algebras for linear homogeneous differential equations. *Russian journal of mathematical physics*. 1997;5(2):189–210.
7. Fomin A.I. Differential Homomorphisms of Linear Homogeneous Systems of Differential Equations. *Russian journal of mathematical physics*. 2012;19(2):159–181.
8. Zhelobenko D.P. Transvector algebras in representation theory and dynamical symmetries. *Teoretiko-grupповые metody v fizike: v 2 t. = Group-theoretical methods in physics: in 2 volumes*. Moscow: Nauka, 1986;2:5–21. (In Russ.)
9. Zhelobenko D.P. *Predstavleniya reduktivnykh algebr Li = Representations of reductive Lie algebras*. Moscow: Fizmatlit, 1994:352. (In Russ.)
10. Fomin A.I. Laplace transforms as differential isomorphisms. *Nauchnaya diskussiya: voprosy matematiki, fiziki, khimii, biologii: sb. st. po materialam XLIV–XLVIII Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. = Scientific discussion: questions of mathematics, physics, chemistry, biology: proceedings of the 44th-48th International scientific and practical conference*. Moscow: Internauka, 2016;(8-12):5–12. (In Russ.)
11. Robertson A.P., Robertson V.Dzh. *Topologicheskiye vektornyye prostranstva / per. s angl. D.F. Borisovoy; pod red. i s pril. D.A. Raykova = Topological vector spaces / translated from English by D.F. Borisova: edited and added by D.A. Raykov*. Moscow: Mir, 1967:261. (In Russ.)
12. Fomin A.I., Titarenko V.I. On the solvability of linear operator equations in linear locally convex spaces. *Nauchno-tehnicheskoye razvitiye Rossii i mir: sb. st. XVII Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. = Scientific and technical development of Russia and the world: proceedings of the 17th International scientific and practical conference*. Saratov: Nauchno-obrazovatel'naya platforma «Tsifrovaya nauka», 2023:23–30. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Александр Иванович Фомин

кандидат физико-математических наук,
доцент, независимый исследователь
(Россия, г. Москва)

E-mail: fomin45@mail.ru

Aleksandr I. Fomin

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, independent
researcher (Moscow, Russia)

Вера Ивановна Титаренко

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики
и информатики, Институт
информационных систем,
Государственный университет
управления (Россия, г. Москва,
Рязанский проспект, 99)

E-mail: vera_xmel@mail.ru

Vera I. Titarenko

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor of the
sub-department of mathematics
and computer science, Institute
of Information Systems, State University
of Management (99 Ryazanskiy avenue,
Moscow, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 20.05.2024

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 30.09.2024

Принята к публикации / Accepted 17.10.2024